

---

# Modèles stochastiques pour les communications

*BA5 • 2026-2027*

# Contents

---

|          |                                                             |          |
|----------|-------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Module 1 : Variables aléatoires</b>                      | <b>3</b> |
| 1.1      | Variable aléatoire . . . . .                                | 3        |
| 1.1.1    | Rappels . . . . .                                           | 3        |
| 1.1.2    | Fonction d'une variable aléatoire . . . . .                 | 3        |
| 1.1.3    | Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire . . . . . | 4        |
| 1.1.4    | Transformées . . . . .                                      | 5        |
| 1.1.5    | Inégalités . . . . .                                        | 6        |

## CHAPTER 1

# Module 1 : Variables aléatoires

---

### À propos de ces notes

Seuls les points nécessitant une explication plus poussée sont détaillés ici. Le reste (définitions, formules, propriétés) se trouve déjà dans la cheatsheet.

## 1.1 Variable aléatoire

---

### 1.1.1 Rappels

#### Fonction de répartition

Une v.a. est caractérisée par sa **fonction de répartition**  $F_X(x)$ , qui est la probabilité que  $X$  prenne une valeur inférieure ou égale au réel  $x$  :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(A), \quad A = \{\zeta \in \Omega \mid X(\zeta) \leq x\}.$$

#### Densité de probabilité

La fonction de **densité de probabilité** est définie par

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

### 1.1.2 Fonction d'une variable aléatoire

Soit  $g(\cdot)$  une fonction continue. Si  $X$  est une v.a. continue, l'expression  $Y = g(X)$  désigne également une v.a. continue. Soit  $y$  une valeur particulière de  $Y$ , et  $x_1, x_2, \dots, x_m$  les  $m$  racines respectives de l'équation  $y = g(x)$ .

#### Densité de $Y = g(X)$

La densité de probabilité de  $Y = g(X)$  est donnée par

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

où la somme porte sur toutes les racines  $x_i$  de  $y = g(x)$ . Cette formule est tout à fait générale, et s'applique à tous les cas où  $X$  est continue.

## 1.1.3 Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire

**Espérance**

L'**espérance** de la fonction  $g(X)$ , où  $X$  est une v.a. de densité de probabilité  $f_X(x)$ , est définie par

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

pour autant que cette intégrale converge absolument.

**Moment d'ordre  $n$** 

Si  $g(X) = X^n$ , l'espérance porte le nom de **moment d'ordre  $n$**  :

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx.$$

**Variance et écart-type**

La v.a.  $Y = X - \mu_X$  est une v.a. **centrée** vu que  $\mathbb{E}[Y] = 0$ . La **variance** de la v.a.  $X$  est le moment d'ordre 2 de  $Y = X - \mu_X$ , et l'écart-type  $\sigma_X$  est la racine carrée de la variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu_X^2. \end{aligned}$$

Dans le cas discret, avec  $P(X = x_i) = p_i$ ,

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \sum_i p_i x_i, \quad \text{Var}[X] = \sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \sum_i p_i (x_i - \mu_X)^2.$$

**Une v.a. sans moments – la loi de Cauchy**

Les moments peuvent ne pas exister pour certaines v.a. La densité de probabilité de la v.a. de Cauchy est

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} [\arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

Par contre,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x f_X(x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} [\ln(1+x^2)]_0^{\infty} = \infty,$$

donc  $x f_X(x)$  n'est pas absolument intégrable, et  $\mathbb{E}[X]$  n'est pas défini.

## 1.1.4 Transformées

## Fonction caractéristique

L'opérateur d'espérance mathématique appliqué à la v.a. complexe  $\exp(j\omega X)$ , où  $j$  est la racine carrée de  $-1$ , définit la **fonction caractéristique**  $\Phi_X(\omega)$  de la v.a.  $X$  :

$$\Phi_X(\omega) = \mathbb{E}[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx.$$

C'est le complexe conjugué de la transformée de Fourier de  $f_X(x)$ . Elle existe toujours car  $|\Phi_X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_X(x)| dx = 1$ , et est maximale en  $\omega = 0$  car  $\Phi_X(0) = 1$ .

## Transformée inverse

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} \Phi_X(\omega) d\omega.$$

Si deux v.a. continues ont la même fonction caractéristique, elles ont la même densité de probabilité, et vice-versa.

## Moments via la fonction caractéristique

En dérivant  $\Phi_X(\omega)$  par rapport à  $\omega$  et en évaluant en  $\omega = 0$  :

$$\left. \frac{d\Phi_X(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = j\mathbb{E}[X] \implies \mathbb{E}[X] = \frac{1}{j} \left. \frac{d\Phi_X(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0}.$$

Plus généralement, pour le moment d'ordre  $k$  :

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{1}{j^k} \left. \frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0}.$$

## Fonction génératrice des moments

De la même manière qu'on peut étendre la transformée de Fourier à la transformée de Laplace en prenant un complexe  $s$  au lieu de  $j\omega$ , on définit la **fonction génératrice des moments** :

$$\hat{\Phi}_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx.$$

## Fonction génératrice de cumulants

On utilise aussi parfois la **fonction génératrice de cumulants**, ou **seconde fonction caractéristique**,

$$\Psi_X(\omega) = \ln \Phi_X(\omega).$$

## Fonction génératrice de probabilité (cas discret)

Dans le cas d'une v.a. discrète  $X$  prenant des valeurs uniformément espacées  $S_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ , on définit une **fonction génératrice de probabilité**, qui est l'espérance de la fonction  $z^X$ , i.e. la transformée en  $z$  de  $p_k$  :

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k.$$

**Propriétés de  $G_X(z)$** 

On retrouve les probabilités  $p_k$  en dérivant  $k$  fois  $G_X(z)$  par rapport à  $z$ , et en évaluant cette dérivée en  $z = 0$  :

$$p_k = P(X = k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G_X(z)}{dz^k} \right|_{z=0}.$$

En dérivant  $k$  fois  $G_X(z)$  mais en évaluant cette dérivée à présent en  $z = 1$ , on trouve les moments factoriaux de  $X$ , à partir desquels on peut retrouver tous les moments de  $X$  :

$$\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)] = \left. \frac{d^k G_X(z)}{dz^k} \right|_{z=1}.$$

Remarquons finalement que  $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ .

**1.1.5 Inégalités***Pourquoi borner plutôt que calculer ?*

Très souvent en pratique, on ne connaît pas complètement la densité de probabilité  $f_X(x)$  d'une v.a.  $X$ . Il est donc très utile de pouvoir borner une probabilité ou l'espérance d'une fonction de cette v.a.

**Inégalité de Markov**

Si  $X \geq 0$  et  $a > 0$ ,

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

**Inégalité de Tchebycheff**

En posant  $D = (X - \mu_X)^2$  et  $b = \sqrt{a}$  dans l'inégalité de Markov,

$$P(|X - \mu_X| \geq b) \leq \frac{\sigma_X^2}{b^2}.$$

**Inégalité de Jensen**

Une fonction  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  est **convexe** si pour tout  $x, x' \in I$  et pour tout  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$g(tx + (1-t)x') \leq t g(x) + (1-t) g(x').$$

Une fonction  $g$  convexe et continue est toujours minorée par une fonction linéaire passant par un point de son graphe : pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) \geq g(a) + \theta(x - a)$ . En prenant  $a = \mathbb{E}[X]$  et  $x = X$ , puis en prenant l'espérance des deux côtés, il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X]).$$